TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD

1.77. Completar la demostración en el Problema 1.14(*b*) demostrando (sin emplear el diagrama de Venn) que

$$A \cup B \quad = \quad A \cup [B - (A \cap B)]$$

donde A y $B - (A \cap B)$ son mutuamente excluyentes.

1.78. Demostrar el resultado (*11*), página 7.

1.79. Generalizar los resultados (*10*) y (*11*), página 7, y así demostrar el resultado (*1*) del Problema 1.54, página 30.

1.80. Demostrar que $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$.

CALCULO DE PROBABILIDADES

1.81. Determinar la probabilidad p, o un estimador de ella, para cada uno de los sucesos siguientes:

(*a*) La aparición de un rey, as, jota de tréboles o reina de diamantes al extraer una sola carta de una baraja común de 52 cartas.
(*b*) La suma 8 aparezca en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*c*) Encontrar un tornillo defectuoso si después de examinar 600 tornillos se han encontrado 12 defectuosos.
(*d*) Un 7 u 11 resulte en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*e*) Al menos aparezca una cara en tres lanzamientos de una moneda honrada.

1.82. Un experimento consiste en la sucesiva extracción de tres cartas de una baraja. Sea A_1 el suceso "rey en la primera extracción", A_2 el suceso "rey en la segunda extracción", y A_3 el suceso "rey en la tercera extracción". Explicar el significado de cada una de las siguientes:

(*a*) $P(A_1 \cap A_2')$, (*b*) $P(A_1 \cup A_2)$, (*c*) $P(A_1' \cup A_2')$, (*d*) $P(A_1' \cap A_2' \cap A_3')$, (*e*) $P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_2' \cap A_3)]$.

1.83. Se extrae una bola aleatoriamente de un caja que contiene 10 bolas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 naranjas. Hallar la probabilidad de que sea (*a*) naranja o roja, (*b*) ni roja ni azul, (*c*) no azul, (*d*) blanca, (*e*) roja, blanca o azul.

1.84. Se extraen dos bolas sucesivamente de la caja del Problema 1.83, remplazando la bola extraída después de cada extracción. Hallar la probabilidad de que (*a*) ambas sean blancas, (*b*) la primera sea roja y la segunda sea blanca, (*c*) ninguna sea naranja, (*d*) sean rojas o blancas o de ambos colores (roja y blanca), (*e*) la segunda no sea azul, (*g*) al menos una sea azul, (*h*) máximo una sea roja, (*i*) la primera sea blanca pero la segunda no, (*j*) solamente una sea roja.

1.85. Resolver el Problema 1.84 si no hay remplazamiento después de cada extracción.

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y SUCESOS INDEPENDIENTES

1.86. Una caja contiene 2 bolas rojas y 3 azules. Hallar la probabilidad de que si dos bolas se extraen aleatoriamente (sin remplazamiento) (*a*) ambas sean azules, (*b*) ambas sean rojas, (*c*) una sea roja y la otra azul.

1.87. Hallar la probabilidad de extraer 3 ases aleatoriamente de una baraja de 52 cartas si las cartas (*a*) se remplazan, (*b*) no se remplazan.

1.88. Si al menos un hijo en una familia con dos hijos es un niño ¿cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

* **1.89.** Demostrar que la probabilidad condicional definida por (*17*), página 8, satisface los axiomas de probabilidad en la página 6 y por tanto todos los teoremas sobre probabilidad.

1.90. Demostrar que si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A \mid B) > P(B \mid A)$.

1.91. Si A es independiente de B demostrar que (*a*) A es independiente de B', (*b*) A' es independiente de B.

1.92. Si A, B, C son sucesos independientes, demostrar que (*a*) A y $B \cup C$, (*b*) A y $B \cap C$, (*c*) A y $B - C$, son independientes.

1.93. Sea A_1 = suceso "número impar en el primer dado", A_2 = suceso "número impar en el segundo dado", A_3 = suceso "total impar en ambos dados". Demostrar que $A_1, A_2; A_2, A_3; A_1, A_3$ son independientes pero que A_1, A_2, A_3 no son independientes.

1.94. La caja *I* contiene 3 bolas rojas y 5 blancas, en tanto que la caja *II* contiene 4 bolas rojas y 2 blancas. Se escoge una bola aleatoriamente de la primera caja y se coloca en la segunda caja sin observar su color. Luego se extrae una bola de la segunda caja. Hallar la probabilidad de que sea blanca.

TEOREMA O REGLA DE BAYES

1.95. Una caja contiene 3 bolas azules y 2 rojas mientras que otra caja contiene 2 bolas azules y 5 rojas. Una bola extraída aleatoriamente de una de las cajas resulta azul. ¿Cuál es la probabilidad de haberla extraído de la primera caja?

1.96. Tres joyeros idénticos tienen dos compartimientos. En cada compartimiento del primer joyero hay un reloj de oro. En cada compartimiento del segundo joyero hay un reloj de plata. En el tercer joyero en un compartimiento hay un reloj de oro, en tanto que en el otro hay un reloj de plata. Si seleccionamos un joyero aleatoriamente, abrimos uno de los compartimientos y hallamos un reloj de plata, ¿cuál es la probabilidad de que el otro compartimiento tenga un reloj de oro?

1.97. La urna I tiene 2 bolas blancas y 3 negras; la urna II, 4 blancas y 1 negra; y la urna III, 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una urna aleatoriamente y una bola extraída aleatoriamente es blanca. Hallar la probabilidad de haber escogido la urna I.

ANALISIS COMBINATORIO, CUENTA Y DIAGRAMAS ARBOL

1.98. Se lanza una moneda tres veces. Utilizar un diagrama árbol para determinar las diferentes posibilidades que pueden suceder.

1.99. Se extraen tres cartas aleatoriamente (sin remplazamiento) de una baraja de 52 cartas. Utilizar un diagrama árbol para determinar el número de maneras en las que se puede extraer (*a*) un diamante y un trébol y un corazón en secuencia (*b*) dos corazones y luego un trébol o una pica.

1.100. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 3 monedas diferentes en 2 posiciones diferentes?

PERMUTACIONES

1.101. Hallar el valor de (*a*) ${}_4P_2$, (*b*) ${}_7P_5$, (*c*) ${}_{10}P_3$.

1.102. ¿Para qué valor de n es ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

1.103. ¿De cuántas formas pueden 5 personas sentarse en un sofá si tiene solamente tres asientos?

1.104. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 7 libros en un estante si (*a*) es posible cualquier ordenación, (*b*) 3 libros determinados deben estar juntos, (*c*) 2 libros determinados deben ocupar los extremos?

1.105. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, . . . , 9 si (*a*) los números deben ser impares, (*b*) las primeras dos cifras de cada número son pares?

1.106. Resolver el problema anterior si las cifras de los números pueden estar repetidas.

1.107. ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras pueden formarse con 3 cuatros, 4 doses y 2 treses?

1.108. ¿De cuántas formas pueden 3 hombres y 3 mujeres sentarse alrededor de una mesa si (*a*) no se impone ninguna restricción, (*b*) dos mujeres determinadas no deben sentarse juntas, (*c*) cada mujer debe estar entre dos hombres?

COMBINACIONES

1.109. Hallar el valor de (*a*) ${}_5C_3$, (*b*) ${}_8C_4$, (*c*) ${}_{10}C_8$.

1.110. ¿Para qué valor de n se cumple que $3 \cdot {}_{n+1}C_3 = 7 \cdot {}_nC_2$?

1.111. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 6 preguntas de un total de 10?

1.112. ¿Cuántos comités diferentes de 3 hombres y 4 mujeres pueden formarse con 8 hombres y 6 mujeres?

1.113. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse 2 hombres, 4 mujeres, 3 niños y 3 niñas con 6 hombres, 8 mujeres, 4 niños y 5 niñas si (a) no se impone ninguna restricción, (b) deben seleccionarse un hombre y una mujer determinados?

1.114. ¿De cuántas formas puede un grupo de 10 personas dividirse en (a) dos grupos de 7 y 3 personas, (b) tres grupos de 5, 3 y 2 personas?

1.115. Con 5 estadistas y 6 economistas quiere formarse un comité de 3 estadistas y 2 economistas. ¿Cuántos comités diferentes pueden formarse si (a) no se impone ninguna restricción, (b) dos estadistas determinados deben estar en el comité, (c) un economista determinado no debe estar en el comité?

1.116. Hallar el número de (a) combinaciones y (b) permutaciones de cuatro letras cada una que pueden formarse con las letras de la palabra *Tennessee.*

COEFICIENTES BINOMIALES

1.117. Calcular: (a) ${}_6C_3$, (b) $\binom{11}{4}$, (c) $({}_8C_2)({}_4C_3)/{}_{12}C_5$.

1.118. Expandir (a) $(x+y)^6$, (b) $(x-y)^4$, (c) $(x-x^{-1})^5$, (d) $(x^2+2)^4$.

1.119. Hallar el coeficiente de x en $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^9$.

1.120. Demostrar que (a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$

(b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$

1.121. Demostrar que (a) $\sum_{j=1}^{n} j({}_nC_j) = n\cdot 2^{n-1}$, ($b$) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j({}_nC_j) = 0$.

PROBABILIDAD UTILIZANDO ANALISIS COMBINATORIO

1.122. Hallar la probabilidad de obtener una suma de 7 puntos (a) una vez, (b) al menos una vez, (c) dos veces, en dos lanzamientos de un par de dados honrados.

1.123. Se extraen dos cartas sucesivamente de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que (a) la primera carta no sea un diez de tréboles o un as, (b) la primera carta sea un as pero la segunda no, (c) al menos una carta sea un diamante, (d) las cartas no sean del mismo palo, (e) no más que una carta sea figura (jota, reina, rey), (f) la segunda carta no sea una figura, (g) la segunda carta no sea una figura dado que la primera sí lo es, (h) las cartas son figuras o picas o ambas.

1.124. Una caja contiene 9 tiquetes numerados del 1 al 9. Si se extraen 3 tiquetes de la caja uno a uno, hallar la probabilidad de que alternativamente sean impar, par, impar o par, impar, par.

1.125. Las apuestas en favor de A de ganar un juego de ajedrez contra B son 3:2. Si se van a jugar tres juegos ¿cuáles son las apuestas (a) en favor de A de ganar al menos dos de los tres juegos, (b) en contra de A de perder los primeros dos juegos?

1.126. En un juego de *naipes* se reparte a cada uno de los 4 jugadores 13 cartas de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que uno de los jugadores obtenga (a) 7 diamantes, 2 tréboles, 3 corazones y 1 pica; (b) un palo completo.

1.127. Una urna contiene 6 bolas rojas y 8 azules. Se extraen cinco bolas aleatoriamente sin remplazamiento. Hallar la probabilidad de que 3 sean rojas y 2 azules.

1.128. (*a*) Hallar la probabilidad de obtener la suma 7 en al menos uno de tres lanzamientos de un par de dados honrados, (*b*) ¿Cuántos lanzamientos se necesitan para que la probabilidad en (*a*) sea mayor que 0.95?

1.129. Se extraen 3 cartas de una baraja de 52. Hallar la probabilidad de que (*a*) las cartas sean de un palo, (*b*) al menos dos sean ases.

1.130. Hallar la probabilidad de que un jugador tenga de 13 cartas 9 de un mismo palo.

APROXIMACION DE STIRLING A $n!$

1.131. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse 30 individuos de un total de 100?

1.132. Demostrar que aproximadamente ${}_{2n}C_n = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$, para valores de n grandes.

1.133. Hallar porcentaje de error en la fórmula de Stirling para $n = 10$.

1.134. Obtener una aproximación al resultado del Problema 1.51.

PROBLEMAS DIVERSOS

1.135. Un espacio muestral consiste de 3 puntos muestrales con probabilidades asociadas dadas por $2p$, p^2 y $4p - 1$. Hallar el valor de p.

1.136. Demostrar que si $A \subset B'$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

1.137. Demostrar que $A - (A \cap B) = A \cap B'$.

1.138. ¿Cuántas palabras pueden formarse con 5 letras si (*a*) las letras son diferentes, (*b*) 2 letras son idénticas, (*c*) todas las letras son diferentes pero dos letras determinadas no pueden estar juntas?

1.139. Cuatro enteros se eligen aleatoriamente entre 0 y 9 inclusive. Hallar la probabilidad de que (*a*) sean diferentes, (*b*) máximo dos sean iguales.

1.140. Un par de dados se lanzan repetidamente. Hallar la probabilidad de que ocurra 11 por primera vez en el sexto lanzamiento.

1.141. ¿Cuál es el menor número de lanzamientos necesarios en el Problema 1.140 para que la probabilidad de obtener 11 por primera vez sea mayor que (*a*) 0.5, (*b*) 0.95?

1.142. Estudiar lo siguiente: no hay tal cosa de que una moneda sea honesta puesto que en cualquier número de lanzamientos es extremadamente difícil que el número de caras y sellos sea igual.

1.143. Supóngase que al lanzar una moneda 500 veces hay una secuencia de 24 lanzamientos que resultan "caras". ¿Puede considerarse la moneda cómo honrada? Explicar.

1.144. Demostrar que para cualesquiera sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

1.145. Al lanzar un par de dados la suma puede ser 2,3, . . . , 12. ¿Podríamos asignar probabilidades de 1/11 a cada uno de esos puntos? Explicar.

1.146. En un juego de póker hallar la probabilidad de obtener (*a*) una *escalera flor*, que consiste de diez, jota, reina, rey y as del mismo palo; (*b*) un *full* que consiste en 3 cartas de un valor y 2 de otro (por ejemplo 3 dieces y 2 jotas, etc.); (*c*) cartas diferentes, (*d*) 4 ases.

1.147. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es de 2/3. Si dispara al blanco hasta que le da la primera vez, hallar la probabilidad de que necesite 5 disparos.

1.148. (*a*) Un estanque contiene 6 compartimientos separados. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 4 bolas idénticas en los compartimientos? (*b*) Resolver el problema si hay n compartimientos y r bolas. Este tipo de problema se presenta en física en conexión con la *estadística Bose-Einstein.*

1.149. (*a*) Un estante contiene 6 compartimientos separados. ¿De cuántas formas pueden colocarse 12 bolas idénticas en los compartimientos de tal manera que ningún compartimiento quede vacío? (*b*) Resolver el problema si hay n compartimientos y r bolas para $r > n$. Este tipo de problema se presenta en física en conexión con la *estadística Fermi-Dirac.*

1.150. Un jugador de póker tiene las cartas 2, 3, 4, 6, 8. Desea descartar el 8 y remplazarla por otra carta que espera sea un 5 (en ese caso obtendrá una "escalera"). ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga el 5 suponiendo que los otros tres jugadores en conjunto tienen (*a*) un cinco, (*b*) dos cincos, (*c*) tres cincos, (*d*) ningún 5? ¿Puede resolverse el problema sin saber el número de cincos que tienen los otros jugadores? Explicar.

1.151. Resolver el Problema 1.50 si el juego se limita a 3 lanzamientos.

1.152. Generalizar el resultado del Problema 1.151.

1.153. Hallar la probabilidad de que en un juego de bridge (*a*) dos jugadores, (*b*) tres jugadores, (*c*) los cuatro jugadores tengan un palo completo.

1.154. Demostrar que $\binom{n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{k}{j}\binom{n-k}{r-j}$ y dar una interpretación combinatoria. (*Sugerencia:* Considerar $(1+x)^k\,(1+x)^{n-k}$ y hallar el coeficiente de x^j en el producto).

1.155. Demostrar que $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ y dar una interpretación combinatoria.

1.156. Demostrar que la probabilidad para que la secretaria del Problema 1.54 obtenga exactamente a letras en los sobres correctos es $\frac{1}{a!}\sum_{k=0}^{n-a}\frac{(-1)^k}{k!}$. [*Sugerencia:* Denotando la probabilidad deseada como $p_n(a)$, demostrar que $p_n(a) = \frac{1}{a!}\,p_{n-a}(0)$ y luego emplear el resultado del Problema 1.54].